LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 17 de enero de 2020

1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ 2020 números enteros de manera que la suma de 1009 de ellos cualesquiera es par. Demostrar que todos los números son pares.

2. Dado un número natural $n > 1$, realizamos la siguiente operación: si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso; en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar todos los valores de n para los cuales este proceso es finito, es decir, se llega a 1 en algún momento.

3. Determinar todos los valores reales de (x, y, z) para los cuales

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x^2y + y^2z + z^2x &= xy^2 + yz^2 + zx^2 \\ x^3 + y^2 + z &= y^3 + z^2 + x \end{aligned}$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020

4. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

5. Calcula el número racional

$$x = (45 + 29\sqrt{2})^{1/3} + (45 - 29\sqrt{2})^{1/3}$$

6. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D. Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE. La línea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P. Demostrar que BP es perpendicular a AD.

Observación. El incírculo de ABC es el círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el centro de dicho círculo.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.